بهینه سازی کوتاهترین فاصله بین دو نقطه(تشریحی)

کوتاهترین فاصله بین دو نقطه. فرض کنید که $P_1=(x_1,y_1)$ و $P_2=(x_2,y_2)$ دو نقطه‌ی معلوم باشند. نقطه‌ی سوم $P_3=(x_3,y_3)$ را طوری بیابید که $d_1=d_2$ کمینه گردد که در آن d_1 فاصله‌ی P_3 از P_1 و d_2 فاصله‌ی P_3 از P_2 می‌باشد.

خلاصه صورت سوال:

با توجه به اینکه نقطه های p_1,p_2,p_3 را داریم و باید مختصات p_3 را طوری تعیین کنیم که فاصله اش از از دو نقطه دیگر هم مساوی و هم کمترین باشد. لذا شاخص عملکرد و قید را در تابع هملتونین مشاهده می کنیم:

$$H=\frac{1}{2}(x_3-x_2)^2+\frac{1}{2}(y_3-y_2)^2+\lambda((x_1-x_3)^2-(x_2-x_3)^2+(y_1-y_3)^2-(y_2-y_3)^2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} H_{x_1}=2\lambda(x_1-x_3) \\ H_{x_2}=(x_2-x_3)(1-2\lambda) \\ H_{x_3}=(x_3-x_2)(1-2\lambda)-(x_1-x_3)(2\lambda)=0\Rightarrow x_3=(1-2\lambda)x_2+2\lambda x_1 (*)\end{cases}$$

$$weknow:(x_1-x_3)^2-(x_2-x_3)^2+(y_1-y_3)^2-(y_2-y_3)^2=0\Rightarrow$$

$$\xrightarrow{*}(x_1-x_2(1-2\lambda)-2\lambda x_1)^2-(x_2-x_2(1-2\lambda)-2\lambda x_1)^2+$$

$$(y_1-y_2(1-2\lambda)-2\lambda y_1)^2-(y_2-y_2(1-2\lambda)-2\lambda y_1)^2$$

$$\Rightarrow(x_1-x_2)^2((1-2\lambda)^2-4\lambda^2)+(y_1-y_2)^2((1-2\lambda)^2-4\lambda^2)=0$$

$$\Rightarrow(x_1-x_2)^2(1-4\lambda)+(y_1-y_2)^2(1-4\lambda)=0\Rightarrow$$

$$((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)(1-4\lambda)=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{4}\xrightarrow{*}x_3=x_2(1-\frac{2}{4})+\frac{x_1}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

در این روابط که مشتقات تابع همیلتون نسبت به طول ها نوشته شده است به تبع آن نیز همین روابط با همین ضرایب برای عرض ها ی این سه نقطه هم برقرار است که برای کوتاه شدن حل از نوشتن صرفنظر کرده ام.

پس در آخر نقطه مد نظر دارای چنین مختصاتی است:

$$p_3(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$$

www.matlabproject.ir